LA EVOLUCIÓN DE LA FILOSOFIA DE LA MATEMÁTICA: UN PANORAMA

Jorge Alberto Molina [1]

Resumo

Neste artigo é apresentado um panorama da Filosofia da Matemática deste século. Dois períodos são distinguidos. No primeiro período predomina a tentativa de justificar a totalidade do conhecimento matemático já seja por meio da redução da Matemática ou à Lógica ou à Metamatemática, já seja eliminando as partes da Matemática que não podem ser refeitas usando métodos construtivos. No segundo período a tentativa de encontrar uma fundamentação da Matemática vinda de fora é abandonada. Novos problemas são discutidos: verdade e realismo matemático (platonismo) ; verdade, prova e história da Matemática. A tese deste artigo é que a Filosofia da Matemática desenvolveu-se de maneira muito semelhante à Epistemologia das Ciências Naturais.

Palavras chaves: Filosofia, Epistemologia, Filosofia da Matemática.

Abstract

In this paper a glance over the contemporary Philosophy of Mathematics is thrown. Two periods are distinguished. In the first of them, the main task was either to reduze Mathematics to other deductive theories such as Logic or Metamathematics, or to rebuilt Mathematics by using constructive methods. In the second one new questions were arisen: truth and mathematical realism; truth, proof and History of Mathematics. The development of Philosophy of Mathematics was analogous to the development of Epistemology of Natural Sciences.

Keywords: Philosophy, Epistemology, Philosophy of Mathematics

[1] Universidade de Santa Cruz do Sul. E-mail: molina@dhum.unisc.br

I

El interés de los filósofos por la Matemática es casi tan antiguo como la Filosofía misma. Es cierto que los filósofos se distinguen por la amplitud de su curiosidad y de sus cuestiones, que los distingue del científico profesional, que en la mayoría de los casos, sólo se interesa por las novedades de su especialidad. Sin embargo no deja ser sorprendente la proecupación de los filósofos por una actividad tan esotérica. La Agricultura, la Ganadería y la Medicina tienen más importancia que la Matemática para la vida cotidiana de la mayoría de los seres humanos y no han merecido la atención que los filósofos han otorgado a esta ciencia. Platon, Descartes, Leibniz, Kant, Husserl, Frege, Russell , Wittgenstein y tantos otros filósofos analisaron la naturaleza del conocimiento matemático. Por qué este reiterado interés? En principio la Matemática y la Filosofía presentarían una característica comun: ambas parecerían ser ejemplos de conocimiento a priori, esto es, conocimiento que no depende para su justificación de la experiencia sensorial. No hay ni laboratorios de Matemática ni laboratorios de Filosofía. En última instancia, el instrumento principal del matemático y del filósofo ha sido y contiúa siendo su cabeza, el lápiz y el papel. Nos sorprendemos hoy por los prodigios de los modernos computadores, prodigios que son hoy posibles porque en los años 30 de este siglo el matemático inglés Alan Turing creó una computadora de lápiz y papel: la máquina de Turing.

Pero mientras que en la Filosofia todo es materia de disputa, la Matemática parece progresar cada vez más, acumulando nuevas verdades. A diferencia de la Matemática, la Filosofía no emprendió el camino seguro de la ciencia .Reiteradamente los filósofos se han preguntado por el éxito de Matemática comparándola con la Filosofía, que no pasa de un campo de ruinas donde cada sistema filosófico sepulta al anterior. Será posible reformular el método de la Filosofía more geometrico como pensaban Descartes y Spinoza de modo que ella consiga el mismo éxito que la Matemática, o será esta una tarea imposible? Mas no será que a pesar de ser conocimientos a priori Matemática y Filosofía son actividades profundamente diferentes? Y por último, y esta es la cuestión mas audaz, será que las verdades de la Matemática son tan ciertas , tan inconmovibles como piensan la mayoría de los matemáticos? Todas estas son cuestiones que los filósofos se han planteado en relación a la Matemática.

El objetivo de este artículo es presentar un panorama de la evolución de la Filosofía de la Matemática en este siglo. Veremos que el tipo de problemas en esta disciplina es muy similar a aquel que encontramos al estudiar la evolución de la Epistemología de las Ciencias naturales. Los límites entre Matemática y Ciencia Natural podrían ser más difusos que lo que pensaron los empiristas lógicos quienes, siguiendo a Hume, separaban el conocimiento matemático (analítico) de la ciencia empírica.

II

En la Filosofía de la Matemática de este siglo predominó en un primer momento un ideal justificacionista. En un período, que podríamos situar hasta la década del 60, la tarea de la Filosofia de la Matemática consistió en tentativas de fundamentar esa ciencia sobre la base de principios, que fueron caracterizados de forma diferente por cada una de las tres escuelas clásicas de fundamentación: logicismo, formalismo e intuicionismo.

La necesidad de fundamentar una ciencia que hasta fines del siglo pasado había sido considerada el paradigma de la certeza se tornó imperiosa debido a las paradojas originadas dentro de la Teoría de los Conjuntos de Cantor. Al distinguir entre diversos grados de infinitud, mostrando que el infinito del continuo geométrico era mayor que el infinito de los números reales, la teoría de los conjuntos se reveló un instrumento indispensáble para el matemático. Sin embargo dentro de la teoría intuitiva de los conjuntos de Cantor podían ser derivadas paradojas[2]. Esas paradojas hicieron pensar a los filósofos, lógicos y matemáticos interesados en cuestiones filósoficas, que la Matemática precisaba de una refundación, que hiciera explícitos los conceptos y reglas de inferencia permitidas, con el objeto de evitar la aparición de contradicciones.

El logicismo de Frege y Russell consitió en la tentativa de reducir la Matemática a la Lógica. Para obtener ese objetivo Frege reformuló la estructura de la Lógica tradicional. Las principales novedades introducidas por Frege fueron dos: una nueva teoría de la cuantificación[3] y la introducción de sistemas formales o cálculos. Un cálculo consiste en un conjunto de expresiones simbólicas (fórmulas) y de reglas de inferencia

[2] La más conocida de esas paradojas es la paradoja de Russell. En lugar del término "conjunto" Russell usa el término "clase". Una clase de objetos puede pertenecer a si misma, esto es, ser elemento de si misma. Por ejemplo, la clase de los objetos abstractos pertence a la clase de los objetos abstractos por el hecho de que una clase es un objeto abstracto. Por el contrario, la clase de los hombres no pertenece a la clase de los hombres dado que la clase de los hombres no es un hombre. Consideremos la clase y formada por todas las clases que no son elementos de si mismas. La clase de los hombres sería un elementol de y. Ahora, podemos preguntar si y es un elemento de y. Si y es un elemento de y entonces y no pertenece a si misma, luego y no es elemento de y. Si y no es elemento de y, entonces y pertenece a y , dado que la clase y contiene todas las clases que no son elementos de si mismas. Luego y es elemento de y.

[3] El análisis de Frege de enunciados universales como "todos los mamíferos son vertebrados" es completamente diferente del análisis aristotélico. Para Aristóteles un enunciado de ese tipo tiene la forma sujeto -predicado, la palabra "todos" calificaria al sujeto "mamíferos" (según la terminología aristotélica diríamos que el sujeto "mamíferos" está tomado en toda su extensión). Para Frege "todos los mamíferos son vertebrados" es un enunciado condicional. Debería ser interpretado así : cualquier cosa que consideremos, si ella es un mamífero entonces es un vertebrado. Mientras que el análisis de Aristóteles nos obliga a aceptar la existencia de mamíferos, el análisis de Frege no. Así para Frege "todos los mamíferos son vertebrados" y "no existen mamíferos" no son contradictorios.Ver Kneale, W. y Kneale, M. 1972, cap VIII.

que permiten obtener una fórmula a partir de otras. Dentro de esas fórmulas hay una clase de fórmulas escogidas que se llaman axiomas. En sí mismas las fórmulas de un cálculo no tienen significado, son meros signos. Pero las fórmulas pueden ser interpretadas de manera que den origen a enunciados pertenecientes a alguna teoría determinada T. En ese caso decimos que el sistema formal es un cálculo para la teoría T, o que fue construido para formalizar T , o que T es un modelo del sistema formal, todas estas formas de expresión son equivalentes. En principio el sistema formal fue construído para representar a T, pero sus fórmulas podrían ser interpretadas de forma de simbolizar otra teoría matemática S .En su Conceptografia Frege presentó un sistema formal para la Lógica.[4]

Frege intentó derivar las verdades matemáticas a partir de las verdades de la Lógica. Para ello era preciso definir "número" a partir de términos lógicos como "concepto", "extensión" e "identidad". En Los Fundamentos de la Aritmética Frege afirma que los números son propiedades de conceptos y no de objetos, define el número que se aplica a un concepto F como la extensión del concepto "equinumérico al concepto F", donde "equinumérico" es definido en términos pertenecientes sólo a la Lógica. La idea subyacente al programa logicista es que la reducción de la Matemática a la Lógica permitiría superar las incertezas de la Matemática al permitir expresar las verdades matemáticas en términos de las verdades analíticas de la Lógica.[5] La tradición asimilaba la Lógica a lo evidente, a lo que no podía ser colocado en duda.

El programa formalista de Hilbert de fundamentación de la Matemática consistió en justificar las diferentes teorías matemáticas por medio de una prueba de que basándose en los axiomas de esas teorías, es imposible demostrar una contradicción, esto es, un enunciado de la forma p y no p. Este tipo de prueba se llama prueba de consistencia. El origen de las pruebas de consistencia está en la aparición de las llamadas Geometrías no euclideanas en el siglo pasado. Como estas Geometrías no precían tener una interpretación física, a diferencia de la Geometría euclideana cuya interpretación es el espacio de la Física newtoniana, surgió la sospecha sobre si a partir de los axiomas de esas Geometrías no era posible demostrar una contradicción. Fue preciso entonces encontrar una prueba de la consistencia de esas Geometrías alternativas . Para realizar la prueba de consistencia de una teoría matemática T era preciso, pensaba Hilbert, encontrar en primer lugar un

[4] Ver Kneale,W. y Kneale, M. 1972, cap. VIII.

[5] Ni Frege ni Russell consideraron la posibilidad de lógicas divergentes. La aparición de las lógicas divergentes (intuicionista, polivalentes, cuántica) ocurrió después de la formulación del programa logicista. Sobre Lógicas divergentes, ver Haack, S. 1973.

sistema formal Γ que represente a T.[6] Decimos que en un sistema formal G derivamos una fórmula A cuando a partir de los axiomas de Γ usando las reglas de inferencia del sistema llegamos a A.[7]. El concepto de derivación formal es la contraparte formal del concepto de deducción dentro de una teoría deductiva cualquiera. Γ debe ser construído para representar T, no sólo en el sentido de que las fórmulas de Γ puedan ser interpretadas como enunciados de T (vimos también que ellas podrían ser interpretadas también como enunciados de otra teoría matemática S[8]) sino también en el sentido de que toda deducción en T pueda ser representada por una derivación formal en Γ. Luego para demostrar la consistencia de T es suficiente probar que en Γ no pueda derivarse ninguna fórmula del tipo $p \wedge \neg p$. En términos más simples, para probar la consistencia de T es suficiente probar la consistencia de Γ. A diferencia de los enunciados de T, las fórmulas de Γ son construidas de acuerdo con reglas precisas. Eso facilita la construcción de una prueba de consistencia para Γ.

La prueba de consistencia de Γ consiste en examinar la estructura de las derivaciones en Γ, y usando herramientas tan simples y formas de razonamiento tan evidentes que no puedan ponerse en duda, mostrar que en Γ no puede derivarse ninguna contradicción. Esas herraminetas y formas de razonamiento son llamadas por Hilbert métodos finitarios. Para que la prueba de consistencia sea realmente significativa desde el punto de vista fundacional, ella debe ser efecutada usando modos inferenciales más simples que aquellos que la teoría Γ intenta expresar. Operamos así con tres planos: por un lado tenemos la teoría matemática (informal) T cuya consistencia queremos probar, por otro lado tenemos el sistema formal Γ que representa T, cuyas fórmulas al ser interpretadas dan origen a enunciados de T, y que además representa todas las demostraciones que puedan realizarse en T por medio de derivaciones formales en Γ, y por último tenemos la metateoría donde se realiza la prueba de consistencia de Γ. Esa prueba de consistencia de Γ debe ser realizada con métodos de prueba más simples que aquellos que son usados en la teoría T.

Para el formalismo el lugar de la evidencia no está en los axiomas de una determinada teoría matemática, que al ser derivados de los axiomas de la Lógica serían

[6] El programa de Hilbert está claramente expuesto en su célebre artículo " Über das Unendliche". Ver Hilbert, 1967.

[7] En términos formales que A se derive en el sistema formal Γ significa que podemos encontrar una sucesión de fórmulas $A1, A2, \ldots An$ tal que $An=A$ y cada Ai , $i<n$, o es un axioma de Γ, o se infiere de las fórmulas anteriores de la sucesión usando alguna de las reglas de inferencia de Γ

[8] Por ejemplo la fórmula "$x\exists y\,(x * y = e)$ puede ser interpretada dentro de la teoría de los grupos y significa que todo elemento de un grupo tiene inverso o puede ser interpretada dentro de la teoría de los números enteros y significa que todo número entero tiene un opuesto.

evidentes (así pensaban los logicistas). Por el contrario es en la metateoría que debemos buscar la evidencia. Son los modos de inferencia finitarios los que garantizarían la evidencia. Las reglas de inferencia que pueden ser aceptadas desde el punto de vista formalista son el principio de inducción completa[9] y las reglas usuales de la Lógica tradicional con excepción de la regla de reducción al absurdo, regla que permite inferir un enunciado A probando una contradicción a partir de la negación de A y de la regla que permite afirmar la existencia de un elemento que satisface la propiedad P a partir de haber probado que no se da el caso que ningún elemento satisfaga P.

El intuicionismo matemático también estuvo a la búsqueda de un fundamento evidente para la Matemática. Para evitar el surgimiento de pardojas los intuicionistas limitaron el conjunto de reglas de inferencia admisibles , eliminaron las definiciones impredicativas y rechazaron la admisión de conjuntos actualmente infinitos. Grosso modo las reglas de inferencia que los intuicionistas aceptan son las reglas de inferencia usadas en la Metamatemática hilbertiana. El uso de definiciones impredicativas ya había sido rechazado por Poincaré quien las responsabilizó por el surgimiento de las pardojas dentro de las teorías de conjuntos. Esas definiciones definen un elemento a partir de una totalidad que engloba ese elemento.[10] Para los intuicionistas como para Aristóteles sólo existe el infinito potencial de la serie de los números naturales. Para ellos no existen conjuntos actualmente infinitos.

La Epistemología de las ciencias naturales también hizo suyo ,en un comienzo, ese ideal justificacionista. Ese ideal se expresó por medio de reiteradas tentativas de justificar el razonamiento inductivo. La crítica de Popper a los intentos de verificar conclusivamente los enunciados de la ciencia fáctica y las dificultades del intento de Carnap de construir una Lógica inductiva, que sirviese de fundamento para las verdades empíricas, derrumbaron la crencia en la posibilidad de una justificación de la ciencia natural. La publicación del libro de Kuhn La estructura de las revoluciones científicas fue reconocida como un golpe definitivo al justificacionismo. En la Filosofía de la Matemáticael justificacionismo demoró un poco más en ser abandonado, aún cuando ya fuesen conocidas a partir de fines de la década del 30 las dificultades presentes en cada uno de los tres programas clásicos

[9] Este principio sirve para inferir que una propiedad A es aplicable a todo número natural si A es aplicable a 0 y se cada vez que A es aplicable a n entonces A es aplicable a n+1. En símbolos : inferimos "x A(x) a partir de A(0) y de $A(t) \supset A(t+1)$ donde t es un parámetro.

[10] Cuando un conjunto M un objeto particular m son definidos de manera que por un lado m pertenece a M y por otro lado la definición de m depende de M decimos que el procedimiento de definición es impredicativo.Para más detalle sobre este asunto ver Kleene, 1974, capítulo III.

de fundamentación de la Matemática[11]. Eso ocurrió debido a la creencia, originada dentro del círculo de ideas del Empirismo Lógico, de que la Matemática por el hecho de ser analítica, tiene una naturaleza diferente de las Ciencias naturales.[12] Sin embargo, alrededor de la década del 70 podemos reconocer la aparición de un nuevo círculo de problemas, que escapan del marco conceptual determinado por cada una de las tres escuelas clásicas de fundamentación de la Matemática.

III

A mediados de este siglo, era manifiesto que ninguno de los programas de fundamentación de la Matemática había conseguido sus objetivos. La reducción de la Matemática a la Lógica era posible, pero no en los términos de Frege. Para obtener ese resultado era preciso recurrir a toda la complejidad de la teoría de los tipos. El objetivo de obtener una reducción a algo más simple se perdía.Por otro lado Gentzen había conseguido probar finalmente la consistencia de la aritmética elemental. Pero se había abierto una discusión sobre si su prueba iba más allá de los métodos finitarios.[13] Por último

[11] La reconstrucción de la Matemática a partir de la Lógica, hecha por Frege, resultó ser inconsistente como lo mostró la paradoja de Russell. Russell presentó una nueva versión del programa logicista: la teoria de los tipos . En la reconstrucción de la Matemática por medio de la teoría de los tipos no se deriva la paradoja de Russell. Pero la teoría de los tipos usa el axioma de reducibilidad que carece de toda justificación intuitiva. De hecho Russell consiguió reducir la Matemática a la Lógica, mas a la Lógica acrescentada por la teoria de los tipos, desdibujándose así la intención original del programa logicista, que consistía en reducir la Matemática a algo mas simple que ella. La Lógica dotada de la teoría de los tipos resulta ser tan compleja como las teorías matemáticas que se intenta reducir.
Los dos teoremas de Gödel, el de la incompletud de la aritmética formal y el de la imposibilidad de probar la consistencia de la aritmética formal por métodos formalizables dentro del mismo sistema formal colocaron un límite aparentemente infranqueable a las aspiraciones del formalismo. Gentzen presentó una demostración de la consistencia de la aritmética formal pero con métodos que parecen extenderse más allá del cuadro de los métodos finitarios recomendados por Hilbert. Si la prueba de Gentzen es de hecho una prueba finitaria es todavía uno de los asuntos más discutidos de la Filosofía de la Matemática.
El intuicionismo por otro lado parece conducir a una mutilación del contenido de la Matemática clásica. Muchas teorías matemáticas no pueden ser reconstruidas en términos intuicionistas. Para una aproximación general al logcismo, formalismo e intuicionismo y a los problemas levantados por cada uno de estos progrmas de fundamentación de la matemática ver Benacerraf y Putnam, 1983; Kleene, 1974, Parte I; Kneale, W. y Kneale, M. 1972, Capítulo XI; Dummett, 1977 y Molina y Legris, 1997.

[12] Esa creencia tiene su origen en Hume con su distinción entre enunciados que expresan relaciones entre conceptos que serían los enunciados de la Matemática y enunciados que se refieren a cuestiones de hecho.

[13] Gentzen presentó dos pruebas diferentes de la consistencia de la aritmética elemental. Ver Gentzen, 1969,Caps. 4 y 8.

el intuicionismo parecía conducir a una mutilación del contenido de la Matemática, teniendo en cuenta que una gran cantidad de teorías matemáticas no podían ser reconstruidas usando los métodos propuestos por los intuicionistas.[14] Parecía como si la Filosofía de la Matemática se hubiera agotado: ninguna de las fundamentaciones de la Matemática era satisfactoria y no había forma de mejorarlas.

En ese contexto no es sorprendente que los filósofos interesados en la Matemática comenzaran a interesarse por otras cuestiones diferentes de la cuestión de encontrar una fundamentación que justificara el contenido de la Matemática, cuestión esta última que parecía estar agotada. En su artículo del año 1967, "Matemática sin fundamentos", Putnam presentó una crítica del ideal justificacionista. Según lo expresado por Putnam en ese artículo la Matemática no precisa de una justificación. No hay según Putnam una cuestión de los fundamentos de la Matemática porque la Matemática no precisa de una justificación externa. Ninguna de las razones enumeradas para creer que hay una crisis en los fundamentos de la Matemática (desarrollo de las geometrías no euclideanas, falta de una prueba de consistencia de las teorías matemáticas, falta de una solución universalmente aceptada de las antinomias)[15] son concluyentes.

Según Putnam la característica principal de teorías matemáticas es la gran variedad de formulaciones equivalentes que ellas poseen. " I don't mean this in the trivial sense of cardinality.........; what I mean is rather than in mathematics the number of ways of expressing what is in some sense the same fact (if the proposition is true) while apparently not talking about the same objects is especially striking" afirma Putnam en ese artículo. En la ciencia natural sucedería lo mismo con la dualidad onda-partícula en la mecánica cuántica. Para esa situación Reichenbach usó el término "descripciones equivalentes". Según Putnam hay dos formas equivalentes de describir el contenido de las teorías matemáticas. La primera forma es "Matemática como lógica modal", la segunda forma es "Matemática como teoría de conjuntos" Según la primera descripción, los enunciados de la Matemática podrían ser tratados como enunciados que contienen modalidades, pero ellos no se referirían a objetos especiales. Si tenemos en cuenta esta doble descripción

[14] En verdad los métodos intuicionistas han resultado más fructíferos de lo que pensaban sus detractores. Una gran cantidad de teorías matemáticas han conseguido ser construídas con los métodos intuicionistas. Muchas más de lo que en un momento se pensó. Mas en todo caso subsiste el problema de la complejidad de las pruebas intuicionistas. En la preferencia por la Matemática clásica hay una razón de simplicidad. Las pruebas clásicas, como era de esperar por el hecho de poder ser usadas en ellas más regras de inferencia y contener menos restricciones sobre las definiciones, son más simples que las pruebas intuicionistas.

[15] El artículo de Putnam dió origen a la interpretación modal de las teorías matemáticas.

de las teorías matemáticas las paradojas se resuelven. La razón para hablar de una crisis de los fundamentos de la Matemática y de la necesidad de una justificación del contenido de la Matemática desaparece.

Mientras que Putnam disolvía la cuestión de la justificación de la Matemática, el artículo de Paul Benacerraf "La verdad matemática" abrió un nuevo ámbito de problemas para la Filosofía de la Matemática, distintos de los colocados por las escuelas logicista, intuicionista y formalista. No se trataba ya de la reducción de la Matemática clásica a algo distinto de ella como la Lógica o la Metamatemática hilbertiana. En su lugar los nuevos problemas propuestos por Benacerraf giraban en torno de la noción de verdad matemática y de conocimiento matemático. Esas cuestiones ya habían sido tratadas por Kant, mas fueron formuladas por Benacerraf con un nuevo nivel de complejidad como resultado de la defínción de verdad de Tarski para sistemas formales y de los desarrollos de la Teoría de la demostración.

Vimos que un sistema formal G intenta representar el esqueleto de una teoría matemática T. Cuando las fórmulas de G son interpretadas dan origen a enunciados que pueden ser leídos como pertenecientes al universo de discurso del que se ocupa T. Se dice que T es un modelo de G. Cuando una fórmula de G al ser interpretada da origen a un enunciado que puede ser demostrado a partir de los axiomas de T se dice que esa fórmula se satisface en T. Al intentar definir de forma precisa la noción de satisfacción en sistemas formales, Tarski dio origen a una nueva teoría : la Teoría de Modelos. La noción de verdad caracterizada à la Tarski parece comprometernos con el platonismo matemático, esto es, con una forma de realismo, dado que la verdad es caracterizada por Tarski en términos de referencia.[16]

Además de la Teoría de Modelos surgió otra disciplina cuya tema son los sistemas formales: la Teoría de la Demostración. Mientras que el enfoque de la Teoría de Modelos es semántico, relacionado con la interpretación de los sistemas formales, el punto de vista de la Teoría de la Demostración es sintáctico. En la Teoría de la Demostración nos interesamos por la estructura de las pruebas (derivaciones) en los sistemas formales. El interés por las pruebas surge a partir del hecho de que conocemos las verdades de la Matemática sólo por medio de pruebas.

[16] Tarski presenta una defínción recursiva del concepto de verdad. Esa recusrsión se basa sobre la estructura sintáctica de las expresiones en un lenguaje formalizado. Para frases atómicas, esto es, para frases que contienen un símbolo de predicado y constantes de individuo como por ejemplo, Pab, la defínción dirá que la frase es verdadera si y solamente si los objetos nombrados por a y por b caen bajo el concepto que está expresado por P. Así vemos , cómo la definición de verdad de Tarski depende de la noción de referencia. Ver Tarski, 1956.

Así por un lado, la caracterización de verdad de Tarski en términos de referencia nos lleva a la aceptación del platonismo matemático, por el otro lado, el hecho de que conocemos las verdades de la Matemática sólo por medio de pruebas nos lleva a una especie de verificacionismo. Cómo conciliar ambas exigencias, la derivada de la concepción semántica de la verdad de Tarski y la derivada de la Epistemología de la Matemática? Ese dilema es el tema del artículo de Benacerraf. Una vez más observemos que cuestiones semejantes se presentaron mutatis mutandis dentro de la Epistemología de las Ciencias Naturales. Pasado el tiempo del apogeo del ideal justificacionista, las discusiones en ese ámbito tomaron la forma de disputa entre partidarios del realismo científico y adversarios del realismo científico (pragmatistas, convencionalistas y otros). Los partidarios del realismo científico afirman que la Ciencias Naturales intentan dar una descripción del mundo así como el matemático platonista afirma que la Matemática intenta dar una descripción adecuada de los objetos matemáticos. Los convencionalistas por el contrario afirman que las teorías de la ciencia natural tienen como objetivo el cálculo y la predicción de fenómenos. Los objetos a los que el científico se refiere como electrón, molécula, virus, son sólo ficciones, útiles para calcular y predecir, según Quine, más útiles que los dioses homéricos.

Dentro del mismo círculo de cuestiones levantadas por Benacerraf se encuentra el artículo de Dummett "Las bases filosóficas de la Lógica intuicionista". En ese artículo Dummett argumentó en favor de una concepción verifacionista del significado de los enunciados matemáticos. El significado de estos debe ser dado en términos de condiciones de aseveración, y las condiciones de aseveración de un enunciado matemático son las pruebas.El conocimiento matemático sólo puede ser caracterizado,según Dummett, en términos de prueba.

IV

La estructura de las revoluciones científicas de Kuhn introdujo la Historia de la Ciencia dentro de la Epistemología. Hasta la aparición de la obra de Kuhn el abordaje de las cuestiones de la Epistemología había sido puramente lógico. A pesar de sus diferencias, Popper y los filósofos del Círculo de Viena compartían un supuesto común, a saber, el de que las cuestiones de la Epistemología podían ser resueltas ya sea por medio de razones pertenecientes a la Lógica o teniendo en cuenta los datos experimentales. Tanto Popper como Carnap querían construir una Lógica de la ciencia. Para Carnap, esa Lógica de la Ciencia, era la Lógica Inductiva cuya tarea consistía en asignar una medida al grado de verosimilitud de las teorías científicas. La construcción de esa Lógica Inductiva debía ser hecha de manera tal que a las falsedades lógicas correspondiera una medida 0, a las verdades lógicas una medida 1 y a las leyes de la ciencia natural, como medida un número

real próximo a 1.[17] Para Popper la Lógica de la Ciencia es la Metodología expuesta en su libro La Lógica de la Investigación Científica. Popper y Carnap divergian en relación a la posibilidade de justificar las teorías científicas y en cuanto a los criterios para distinguir las teorías científicas de las no científicas. Mas para los dos , la última palabra en cuestiones epistemológicas la tenían la Lógica y la experimentación. Popper se valía de la Lógica deductiva tradicional en cuanto que Carnap intentó construir una Lógica inductiva.

A partir de Kuhn las consideraciones históricas se hicieron relevantes para la Epistemología. La ciencia no podría ser más comprendida sin considerar la Historia de la Ciencia. Así como Kuhn introdujo la Historia de la Ciencia dentro de la Epistemología de las Ciencias Naturales, por la misma época Lakatos introdujo la Historia de la Matemática dentro de la Filosofía de la Matemática. Una vez más vemos el paralelismo entre la evolución de la Epistemología de las Ciencias Naturales y la Epistemología de la Matemática.

En su libro Pruebas y refutaciones: la Lógica del descubrimiento matemático Lakatos presenta una nueva visión de la Matemática. Sus fuentes son la heurística del matemática húngaro G.Pólya y la filosofía de Popper. Lakatos, como Popper, es un falsifacionista. Según Lakatos, lo que en la Matemática está sujeto a falsificación (refutación) no son las conjeturas sino las pruebas que intentan demostrar esas conjeturas. El análisis de las pruebas, sus refutaciones, permiten mejorar las conjeturas hasta transformarlas en teoremas susceptibles de prueba rigurosa, pero esto último sucede ya en un estado maduro de las teorías matemáticas.

Lakatos mostró que una prueba matemática errónea tiene valor. La crítica de esa prueba permite mejorar la conjetura que ella intenta probar. Los conceptos envueltos en la conjetura quedan mejor definidos, su ámbito de validez deviene preciso. Podemos mejorar nuestra conjetura al criticar la prueba. Y además de eso ,la crítica de la prueba permite dar origen a nuevos programas de investigación.

Lakatos aplicó su análisis a la conjetura de Euler de que existe una relación precisa entre las aristas, los vértices y el número de caras de un poliedro. Esa relación es V+C-A=2.

---

[17] Es sorprendente el paralelismo entre el programa de fundamentación de la Matemática de Hilbert y el programa carnapiano de justificación de la ciencia natural. En ambos casos la justificación debe ser metateórica. En el primer caso es la Metamatemática hilbertiana la que justificaría la Matemática, en el segundo caso es la Lógica Inductiva la que justificaría las teorías de la Ciencia natural. La Lógica Inductiva es una metateoría cuyo objeto son las teorías de la ciencia natural. Cuál es el fin de la Lógica Inductiva?. Construir uma medida de la verosimilitud de los enunciados de la Ciencia Natural de modo tal que a las Leyes científicas les corresponda una medida próxima a 1. Este paralelismo refuerza mi tesis de la similitud entre el desarollo de la Filosofía de la Matemática y el desarrollo de la Filosofía de la Ciencia Natural.

Cauchy presentó una prueba de esa conjetura que fue criticada por muchos matemáticos del siglo XIX. Se presentaron contraejemplos a la conjetura de Euler y a la prueba de Cauchy. Esos contraejemplos fueron clasificados por Lakatos en dos tipos: contraejemplos globales que son en verdad, contrajemplos a la conjetura de Euler y contraejemplos locales que son contraejemplos a alguno de los lemas usados (implícitamente) por Cauchy en su prueba. Los contraejemplos locales son los que permiten una crítica de la prueba. En el caso de un contraejemplo global pero no local podemos salvar nuestra conjetura redefiniendo los términos que aparecen en la conjetura. Si una figura refuta la conjetura de Euler diremos que esa figura no es un poliedro. En el caso de contraejemplos locales podemos colocar los lemas afectados como condiciones del teorema. Uno de los lemas (implícitos) en el teorema de Cauchy es que cuando retiramos una cara de un poliedro podemos extender la figura restante en un plano, esto es planificar la figura. Si encontramos un poliedro que no puede ser planificado de ese modo, ese poliedro será un contraejemplo local. Llamamos "simples" a los poliedros que pueden ser planificados. Diremos entonces que para todo poliedro simple vale la relación $V+C-A=2$. Ahora la aparición de un poliedro que no pueda ser planificado no constituirá una crítica a la conjetura de Euler, pues ella vale sólo para los poliedros simples.

Lakatos aplicó su mismo método de análisis a la conjetura de Cauchy de que el límite de una serie convergente de funciones continuas es una función continua. Esa conjetura y la prueba de ella ofrecida por Cauchy fueron criticadas por muchos matemáticos en el siglo pasado. Se presentaron una gran cantidad de contraejemplos. Pero así como en el caso de la prueba de la conjetura de Euler esas críticas fueron fecundas. En este último caso la crítica permitió precisar el concepto de poliedro así como dió origen a un programa de investigación que con el tiempo constituyó lo que se llama hoy topología algebraica. En el caso de la conjetura de Cauchy sobre las funciones continuas, la crítica permitió obtener el concepto de convergencia uniforme y el desarrollo de la teoría de las series de funciones convergentes.

El interés de Lakatos es por la Matemática ordinaria, la Matemática hecha por los analistas, los algebristas y los geómetras. No demostró mayor preocupación con los sistemas formales de los lógicos matemáticos. Lakatos comparte con Popper la opinión de que es imposible encontrar una justificación concluyente de las teorías científicas. Para Lakatos la tentativa del Logicismo de derivar las teorías matemáticas a partir del contenido trivial de la Lógica es una tentativa fracasada. Y ello porque la Lógica que debe ser usada en la derivación de la Matemática no tiene un contenido trivial. También según Lakatos, la tentativa formalista de justificar las teorías matemáticas por medio de sistemas formales está también condenada al fracaso. Porque las mismas cuestiones que se presentan en la teoría objeto pueden ser levantadas en relación a la metateoría. Cómo sabemos que la prueba metamatemática de la consistencia de un sistema formal es correcta? En relación

a ese punto no estamos mucho mejor que en relación a la corrección de la prueba de Cuchy de la conjetura de Euler. Sólo trasladamos las cuestiones del lenguaje objeto al metalenguaje.[18]

La Matemática sólo puede ser comprendida por medio de esta dialéctica de pruebas y refutaciones. Como en la dialéctica hegeliana el error, la falsedad, es un paso necesario para llegar a la verdad. La síntesis, la conjetura mejorada, contiene en sí la tesis (la conjetura ingenua) y su antítesis (la crítica de la prueba de la conjetura ingenua).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENACERRAF, P., PUTNAM, H.(Eds.)*Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Cambridge University Press, 1983.

BENACERRAF, P. "Mathematical Truth". Em: *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Benacerraf, P. & Putnam, H. (Eds.)1983.

DUMMETT, M. "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic". Em: Dummett, M. *Truth and Other Enigmas*,Harvard University Press,1978.

________. *Elements of Intuitionism*. Oxford University Press,1978

FREGE, G. *The Foundations of Arithmetic*. Tradução inglesa de J. L. Austin. Blackwell, 1959

GENTZEN, G. "The Consistency of Elementary Number Theory. Em: *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Szabó (ed),p132 (original do alemão,1936), North Holland,1969.

________. "New Version of the Consistency Proof for Elementary Number Theory". Em: *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*,Szabó (ed),p.132 (original do alemão 1938),North Holland, 1969.

HAACK, S. *Deviant Logic*.Cambridge University Press, 1973.

HILBERT, D. "On Infinite". Em: *From Frege to Gödel*,J.Van Heijenoort (ed), (original do alemão "Uber das Unendliche"1925) Harvard University Press,1967.

KLEENE, S. C. *Introducción a la metamatemática*. Tradução castelhana de M.Garrido, Tecnos, 1974.

[18] Ver Lakatos, 1981, caps 1 y 2.

KNEALE,W., KNEALE, M. *El desarrollo de la Lógica.* Tradução castelhana de M. Garrido. Tecnos, 1980.

LAKATOS, I. *Pruebas y refutaciones.* Tradução castelhana de Carlos Solís, Alianza, 1978.

________. *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Tradução castelhana de Diego Ribes Nicolás. Alianza, 1981.

MOLINA, J. "Definiciones impredicativas". Em: *Revista de Filosofia*,Buenos Aires, v.2, n.1, p. 43-66, 1987.

________. "A noção de prova do ponto de vista intuicionista". Em: *Episteme*,Porto Alegre,v.3, n.7, p.158-164, 1998.

MOLINA, J. LEGRIS, J.*Lógica Intuicionista-uma abordagem filosófica.* Pelotas: Educat, 1997.

POINCARÉ, H. *La ciencia y la hipótesis.* Buenos Aires: Austral, 1946.

POPPER, K. R. *La lógica de la investigación científica.*Tradução castelhana Victor Sánchez de Zavala, Tecnos, 1962.

PUTNAM,H. "Mathematics without Foundations". Em: *Philosophy of Mathematics:selected readings.* P. Benacerraf & H. Putnam (Eds.), 1983.

RUSSELL, B. "Mathematical Logic as Based on The Theory of Types". Em: *American Journal of Mathematics* 30, p. 222-262.

________. *Los principios de la Matemática.* Tradução castelhana de Juan Carlos Grinberg. Madri: Espasa-Calpe, 1967.

TARSKI, A. "The concept of truth in formalized languages". Em: Tarski, A. *Logic, Semantics and Metamathematics*, p. 152-268, Clarendon Press, 1956.